DS n°1 : Logique

Durée : 2 heures. Calculatrices non autorisées.
Toute affirmation non triviale doit être justifiée.

Exercice 1 : Raisonnements (et un peu d'ensembles)

1) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad n^2 + n \text{ est divisible par } 2$$

3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \left(n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8\right) \implies (n \text{ est pair})$$

4) On considère l'assertion suivante :

$$P: \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \qquad (ab \geq a) \implies (a \leq 0 \quad \text{ou} \quad b \geq 1)$$

a) Écrire la négation de P.

b) Réécrire P en passant par la contraposée. En déduire (avec justification) si P est vraie.

5) Que vaut $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\}))$?

Problème : équation fonctionnelle

On veut déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) + f(f(n)) = 2n \tag{E}$$

1) On pose la fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = n$. Montrer que g vérifie l'équation (E).

2) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifie (E).

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) \in [\![0, 2n]\!]$.

b) En déduire $f(0)$.

c) En raisonnant par disjonction de cas, déterminer $f(1)$.

d) Montrer que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \qquad (f(m) = f(n) \implies m = n)$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad f(k) = k$$

En raisonnant par l'absurde, montrer que $f(n+1) \geq n+1$, puis que $f(n+1) \leq n+1$. Conclure.

f) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = n$.

3) Conclure, en précisant le type de raisonnement utilisé.